

⑤ Tam Diferansiyel Denklemler Haline Getirilabilen Denklemler – İntegrasyon Çarpanları

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denklemini için $M_y \neq N_x$ ise denklem tam değildir. Böyle denklemleri çözmek için tam hale getirme yöntemlerini vereceğiz.

Tanım: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denklemini tam değilse, fakat bu denklemin uygun bir $\mu(x,y)$ fonksiyonu ile çarpılmasıyla elde edilen

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

diferansiyel denklemini tam ise $\mu(x,y)$ fonksiyonuna verilen diferansiyel denklemin **integral (integrasyon) çarpanı** denir.

Örnek: $(3y + 4xy^2)dx + (2x + 3x^2y)dy = 0$ diferansiyel denkleminde

$$\left. \begin{aligned} M(x,y) &= 3y + 4xy^2 \\ N(x,y) &= 2x + 3x^2y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M_y &= 3 + 8xy \\ N_x &= 2 + 6xy \end{aligned} \quad M_y \neq N_x$$

olduğundan denklem tam diferansiyel değildir.

Bu denklemin her bir terimi $\mu(x,y) = x^2y$ ile çarpılırsa

$$(3x^2y^2 + 4x^3y^3)dx + (2x^3y + 3x^4y^2)dy = 0 \quad \text{olup buradan}$$

$$\left. \begin{aligned} M_1(x,y) &= 3x^2y^2 + 4x^3y^3 \\ N_1(x,y) &= 2x^3y + 3x^4y^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (M_1)_y &= 6x^2y + 12x^3y^2 \\ (N_1)_x &= 6x^2y + 12x^3y^2 \end{aligned} \quad (M_1)_y = (N_1)_x$$

olduğundan yeni denklem tamdır ve $\mu(x,y) = x^2y$ verilen denklemin

bir integral çarpanıdır.



Scanned with
CamScanner

İntegral Garpanının Bulunması

$$\lambda = \lambda(x, y)$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \dots (2.8)$$

denkleminin bir integral garpanı olsun. Bu takdirde

$$\lambda M(x, y)dx + \lambda N(x, y)dy = 0$$

denklemi tam diferansiyel olacaktır

$$\frac{\partial}{\partial y} (\lambda M) = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda N)$$

esitliği sağlanır. Buradan da

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} M + \lambda \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} N + \lambda \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\underset{=M_y}{\frac{\partial M}{\partial y}} \qquad \qquad \qquad \underset{=N_x}{\frac{\partial N}{\partial x}}$

$$\lambda (M_y - N_x) = N \frac{\partial \lambda}{\partial x} - M \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad \dots (2.9)$$

Şeklinde λ bilinmeyenine göre bir kısmi diferansiyel denklem elde edilir.

(2.9) denklemini çözmek zor olduğu için λ nın bazı halleri için bu

kısmi diferansiyel denklemi bir adi diferansiyel denkleme indirgenbilir ve λ kolayca bulunabilir.

② λ , yalnız x in bir fonksiyonu olsun. Yani $\lambda = \lambda(x)$ olsun.

Bu durumda $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dx}$ ve $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$ olup (2.9) denklemi

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \lambda \quad \dots (2.10)$$

biçiminde yazılabilir. λ yalnız x in fonksiyonu olduğundan $\frac{M_y - N_x}{N}$ de yalnız x in fonksiyonudur. Bu durumda (2.10) adi diferansiyel denkleme indirgenir.

Böylece görülür ki

$$\frac{M_y - N_x}{N} \lambda \quad \dots (2.11)$$

fonksiyonu yalnız x in fonksiyonu ise (2.8) denkleminin yalnız x in bir fonksiyonu olan bir integral çarpanı vardır. Bu integral çarpanı (2.10) denkleminin çözülmesiyle bulunur.

(2.10) denklemini

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\mu_y - N_x}{N} dx$$

şeklinde yazılırsa değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olur. Buradan integral alınırsa λ integral sonucu

$$\ln(\lambda(x)) = \int \frac{\mu_y - N_x}{N} dx \Rightarrow \lambda(x) = e^{\int \frac{\mu_y - N_x}{N} dx}$$

şeklinde bulunur.

→ $\frac{\mu_y - N_x}{N}$ sadece x e bağlı ise $\lambda(x) = e^{\int \frac{\mu_y - N_x}{N} dx}$ dir.

⁴
Örnek: $(x^2 + y^2 + x) dx + xy dy = 0$ denkleminin bir integral çarpanını bulunuz

$$\begin{array}{l} M(x,y) = x^2 + y^2 + x \\ N(x,y) = xy \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_y = 2y \\ N_x = y \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} M_y \neq N_x \text{ olduğundan denklemin} \\ \text{tam diferansiyel değildir.} \end{array}$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x} \quad \text{sadece } x \text{ e bağlı olduğu için}$$

integral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

denek bulunur.

©e λ , yalnız y nin bir fonksiyonu olsun. Yani $\lambda = \lambda(y)$ olsun.

Bu durumda $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dy}$ ve $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$ olup (2.9) denklemi

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{My - Nx}{-M} \lambda \quad \dots (2.12)$$

denklemine indirgenir. Eğer

$$\frac{My - Nx}{-M} \quad \dots (2.13)$$

fonsiyonu yalnız y nin fonksiyonu ise (2.8) denkleminin yalnız y nin fonsiyonu olan bir integral çarpanı vardır ve bu integral çarpanı

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{My - Nx}{-M} dy$$

$$\Rightarrow \ln(\lambda(y)) = \int \frac{My - Nx}{-M} dy \Rightarrow \lambda(y) = e^{\int \frac{My - Nx}{-M} dy} \text{ şeklindedir.}$$

→ $\frac{My - Nx}{-M}$ sadece y ye bağlı ise $\lambda(y) = e^{\int \frac{My - Nx}{-M} dy}$ dir.



Scanned with
CamScanner

Örnek: $6xy dx + (4y + 9x^2) dy = 0$ denkleminin bir integral çarpanını bulur

$$\begin{array}{l} M(x,y) = 6xy \\ N(x,y) = 4y + 9x^2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_y = 6x \\ N_x = 18x \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} M_y \neq N_x \text{ olduğundan} \\ \text{denklemin} \\ \text{tam değildir.} \end{array}$$

$$\frac{M_y - N_x}{-N} = \frac{6x - 18x}{-6xy} = \frac{2}{y} \quad \text{sadece } y \text{ ye bağlı olduğundan}$$

Integral çarpanı

$$Q(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-N} dy} = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln y} = y^2$$

olarak bulunur.

Örneği $y' = \frac{x^2+y^2-x}{y}$ denkleminin aşımını bulunuz.

Denklemin değişkenlerine ayrılabilir veya homojen değildir. Denklemin
 $y dy = (x^2+y^2-x) dx \Rightarrow (x-x^2-y^2) dx + y dy = 0$ yazılabilir.

$$\left. \begin{array}{l} M(x,y) = x-x^2-y^2 \\ N(x,y) = y \end{array} \right\} \begin{array}{l} M_y = -2y \\ N_x = 0 \end{array} \left\} \begin{array}{l} M_y \neq N_x \text{ olduğundan denklemin} \\ \text{tam diferansiyel değildir.} \end{array}$$

İntegral çarpanı aranmalıdır.

$$\frac{M_y - N_x}{N} \rightarrow \text{sadece } x \text{ e bağlı}$$

$$\frac{M_y - N_x}{-M} \rightarrow \text{sadece } y \text{ ye bağlı}$$

$$\bullet \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-2y-0}{-x+x^2+y^2} \text{ sadece } y \text{ ye bağlı değildir.}$$

$$\bullet \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2y-0}{y} = -2 = -2x^0 \text{ sadece } x \text{ e bağlıdır}$$



Scanned with
CamScanner

→ Sabiti hem x e bağlı hem y ye bağlı olarak düşünebilirsiniz

$\frac{My-Nx}{N} = -2$ sadece x e bağılı olduğundan integral sonucu

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{My-Nx}{N} dx} = e^{\int -2 dx} = e^{-2x} \text{ olur.}$$

Denklem $\lambda(x) = e^{-2x}$ ile çarpılırsa

$$(xe^{-2x} - x^2e^{-2x} - y^2e^{-2x}) dx + ye^{-2x} dy = 0 \quad \text{rain}$$

$$\begin{aligned} P(x,y) &= xe^{-2x} - x^2e^{-2x} - y^2e^{-2x} \\ Q(x,y) &= ye^{-2x} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_y = -2ye^{-2x} \\ Q_x = -2ye^{-2x} \end{array} \right\} \quad P_y = Q_x$$

olup denklem tamdır. O halde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xe^{-2x} - x^2e^{-2x} - y^2e^{-2x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = ye^{-2x}$$

doğru şekilde $u = u(x,y)$ fonksiyonu vardır bunu bulalım:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y e^{-2x} \quad \text{kullanılırsa}$$

$$u(x, y) = \int y e^{-2x} dy + h(x) = \frac{y^2}{2} e^{-2x} + h(x) \quad \text{dur.}$$

Buradan x e göre türev alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y^2 e^{-2x} + h'(x)$$

$$\text{dur. } \frac{\partial u}{\partial x} = x e^{-2x} - x^2 e^{-2x} - y^2 e^{-2x} \quad \text{eşitliği de kullanılırsa}$$

$$x e^{-2x} - x^2 e^{-2x} - y^2 e^{-2x} = -y^2 e^{-2x} + h'(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = x e^{-2x} - x^2 e^{-2x}$$

$$\Rightarrow h(x) = \int x e^{-2x} dx - \int x^2 e^{-2x} dx$$

$$\Rightarrow h(x) = \int x e^{-2x} dx + \frac{x^2}{2} e^{-2x} - \int x e^{-2x} dx$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{x^2}{2} e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx \\ &= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx \end{aligned}$$

bulunup genel çözüm $u(x, y) = c$ olduğundan oradan çözüm

$$\frac{y^2}{2} e^{-2x} + \frac{x^2}{2} e^{-2x} = c \Rightarrow \underline{x^2 + y^2 = 2c e^{2x}}$$

Örnek: $y' = \frac{y}{y^2+x-1}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$(y^2+x-1)dy - ydx = 0 \text{ olup}$$

$$\begin{aligned} M(x,y) &= -y & N(x,y) &= y^2+x-1 \\ M_y &= -1 & N_x &= 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} M_y \neq N_x \end{array} \right\} \text{ olduğundan denklem tam değildir.}$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} \rightarrow \text{sadece } x \text{ e bağılı,} \quad \frac{M_y - N_x}{-M} \rightarrow \text{sadece } y \text{ ye bağılı olmalı}$$

$$\bullet \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-1-1}{y^2+x-1} = \frac{-2}{y^2+x-1} \text{ sadece } x' \text{ e bağılı değil}$$

$$\bullet \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-1-1}{-(-y)} = \frac{-2}{y} \text{ sadece } y \text{ ye bağılıdır. O halde}$$

$$\begin{aligned} \text{integral carpanı} \quad \lambda(y) &= e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy} = e^{\int \frac{-2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = y^{-2} = \frac{1}{y^2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\text{Denklem } \lambda(y) = \frac{1}{y^2} \text{ ile çarpılırsa } \left(1 + \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y^2}\right) dy - \frac{1}{y} dx = 0$$



Scanned with

CamScanner

denklemi elde edilir. Bu durumda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{y} \quad \vee \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y^2} \quad \text{olacak şekilde bir}$$

$u = u(x, y)$ fonksiyonu vardır.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{y} \Rightarrow u(x, y) = \int -\frac{1}{y} dx + h(y) = -\frac{x}{y} + h(y)$$

Buradan

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{\frac{x}{y^2}} + h'(y) = 1 + \cancel{\frac{x}{y^2}} - \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow h'(y) = 1 - \frac{1}{y^2} \Rightarrow h(y) = \int (1 - \frac{1}{y^2}) dy$$

$$\Rightarrow h(y) = y + \frac{1}{y} \quad \text{bulunur.}$$

$$u(x, y) = -\frac{x}{y} + y + \frac{1}{y} \quad \text{olup genel çözüm}$$

$$-\frac{x}{y} + y + \frac{1}{y} = c \quad \text{veya} \quad \underline{y^2 - x + 1 = cy} \quad \text{denklemi}$$



Scanned with
CamScanner